SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Angelo Cavallucci

INCLUSIONI DIFFERENZIALI IN UN DOMINIO TUBOLARE

22 giugno 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. Vengono esposti alcuni risultati di esistenza e invarianza per inclusioni differenziali in un dominio tubolare, dovuti a Benabdellah, Bothe, Castaing, Frankowska, Gamal Ibrahim,Plaskacz e Rzezuchowski.

Abstract . We present some recent results on existence and invariance for a differential inclusion on a graph, obtained by Benabdellah, Bothe, Castaing, Frankowska, Gamal Ibrahim, Plaskacz and Rzezuchowski.

INCLUSIONI DIFFERENZIALI IN UN DOMINIO TUBOLARE

ANGELO CAVALLUCCI

Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d. per } 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0, \\ x(t) \in Q(t) \text{ per } 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

per il quale supponiamo verificate in tutto il seguito almeno le condizioni seguenti

(H1) $[0,T] \ni t \to Q(t) \neq \emptyset$ chiuso $\subset R^n$,

(H2) $[0,T] \ni t \to D(t) \subset R^n$,

(H3) $[0,T] \times D \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset$ convesso chiuso $\subset R^n$,

(H4) esiste $0 \leq g \in L^1(0,T)$ tale che

$$F(t, D(t)) \subset g(t)B \text{ q.d. per } 0 \leq t \leq T;$$

Abbiamo posto $B = \{x \in R^n | \, |x| \leq 1\}$ e abbiamo identificato, come sempre in seguito, la multifunzione D con il proprio grafico.

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di esistenza per il problema (P) dovuti a Bothe [3] e Frankowska-Plaskacz-Rzezuchowski [5].

Ricordiamo alcune definizioni per

$$Y \ni y \to G(y) \subset X = \text{ spazio di Banach .}$$

Se Y é uno spazio topologico, G si dice *semicontinua superiormente* (u.s.c.) se

$$G^{-1}(E) = \{y \in Y | G(y) \cap E \neq \emptyset\} = \text{ chiuso}$$

per ogni E chiuso, mentre G si dice *semicontinua inferiormente* se

$$G^{-1}(E) = \text{ aperto}$$

per ogni aperto E in X, e G si dice *continua* se é sia u.s.c. che l.s.c..

Se $\mathcal{A}$ é una $\sigma-$algebra su Y, si dice che G é $\mathcal{A}$ - misurabile (o semplicemente misurabile) se

$$G^{-1}(E) \in \mathcal{A}$$

per ogni aperto E in X.

Per $E, F \in X$ poniamo

$$e(E,F) = inf\{\epsilon > 0 | \, E \subset F + \epsilon B\}$$

Se $Y = [0,T]$, diremo, seguendo [5], G *assolutamente continua da sinistra* (l.a.c.) se

$$\forall\epsilon, \forall K \text{ compatto} \subset X, \exists\delta > 0, \forall t_i, \forall \bar{t}_i : 0 \le t_1 < \bar{t}_1 \le t_2 < \bar{t}_2 \le \ldots \le t_n < \bar{t}_n \le T,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{t}_i - t_i) \le \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e(K \cap G(t_i), G(\bar{t}_i)) \le \epsilon,$$

mentre diremo G *assolutamente continua* se vale l'implicazione precedente con la sostituzione di $e(K \cap G(t_i), G(\bar{t}_i))$ con

$$e_K(G(t_i), G(\bar{t}_i)) = max\{e(K \cap G(t_i), G(\bar{t}_i)), e(K \cap G(\bar{t}_i), G(t_i))\}.$$

Diremo anche, seguendo [3], G *u.s.c. da sinistra* se

$$\forall\epsilon, \forall t_0 \in]0,T], \exists t_1 \in [0, t_0[, \forall t : t_1 \le t \le t_0 \Rightarrow G(t) \subset G(t_0) + \epsilon B.$$

Poniamo anche per ogni $A \subset [0,T]$ misurabile secondo Lebesgue

$$\int_A G(t)\,dt = \{\int_A g(t)\,dt \mid g \in L^1(A,X), g(t) \in G(t) \text{ q.d.}\}$$

Per ogni $(t,x) \in G$, ossia $x \in G(t)$, poniamo

$$DG(t,x)(1) = \{v \in X \mid \liminf_{h\to 0+} \frac{d(x+hv, G(t+h))}{h} = 0\}$$

Si verifica, cfr.[1], che

$$v \in DG(t,x) \Longleftrightarrow (1,v) \in T_G(t,x),$$

ove $T_G(t,x)$ rappresenta il *cono contingente* nel punto (t,x) al grafico di G.

Infine diremo, seguendo [3] e [6], che la funzione F come in (H3) é *quasi u.s.c.* se

$$\forall\epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ chiuso } \subset [0,T] : \mu([0,T]\backslash K_\epsilon) \le \epsilon, \quad F_{|(K_\epsilon \times R^n)\cap D} \text{ é u.s.c.}$$

Qui μ indica la misura di Lebesgue.

Indichiamo alcune condizioni necessarie per il problema (P).

Proposizione 1. *Supponiamo soddisfatte le condizioni (H1), (H3) con D=Q, (H4) e supponiamo che per ogni $t_0 \in [0,T]$ e ogni $x_0 \in Q(t_0)$ esista una soluzione $x(.) \in W_1^1(t_0,T;R^n)$ del problema (P). Allora si ha*

a) Q é assolutamente continua da sinistra;

b) $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall t, \bar{t} \in [0,T] : 0 \le \bar{t} - t \le \delta \Rightarrow e(Q(t), Q(\bar{t})) \le \epsilon$;

c) $\forall\alpha > 0, \forall(t,x) \in Q$:

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{d(0, Q(t+h) - x - \int_t^{t+h} F(s, Q(s) \cap [x + \alpha B])\,ds)}{h} = 0;$$

d) se supponiamo soddisfatte le condizioni (H3) e (H4) con $D(t) = R^n$ per ogni t, se $F(.,x)$ é misurabile per ogni x e se $F(t,.)$ é u.s.c. per quasi ogni t, allora esiste $J \subset [0,T]$ con $\mu(J) = 0$ tale che

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : F(t,x) \cap DQ(t,x)(1) \neq \emptyset.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [5].

Nei teoremi che seguono sono riuniti i principali risultati di esistenza contenuti in [3] e [5].

Teorema 1. *Supponiamo soddisfatte le condizioni (H1), (H2), (H3) con D=Q, (H4). Per ogni* $t_0 \in [0,T], x_0 \in Q(t_0)$ *esiste una soluzione* $x(.) \in W_1^1(t_0,T;R^n)$ *del problema (P) sotto almeno una delle condozioni seguenti:*

i) Q é assolutamente continua da sinistra, F(t,.) é u.s.c. su D(t) per quasi ogni t, esiste $J \subset [0,T]$ *tale che* $\mu(J) = 0$ *e*

$$\forall \beta, \forall t \notin J, \forall x \in Q(t):$$

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{d(0, Q(t+h) - x - \int_t^{t+h} F(s, Q(s) \cap [x + \alpha B])\, ds)}{h} = 0;$$

ii) Q é u.s.c. da sinistra, F é quasi u.s.c., esiste $J \subset [0,T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : F(t,x) \cap DQ(t,x)(1) \neq \emptyset,$$

$$\forall t \in J, \forall x \in Q(t) : DQ(t,x)(1) \neq \emptyset;$$

iii) valgono le condizioni (H3) e(H4) con $D(t) = R^n$ *per ogni t, Q é assolutamente continua da sinistra, F(.,x) é misurabile per ogni x, F(t,.) é continua per quasi ogni t, esiste* $J \subset [0,T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : F(t,x) \cap DQ(t,x)(1) \neq \emptyset,$$

Diamo alcune indicazioni sulle dimostrazioni dei vari punti del teorema.

Per la dimostrazione del punto i) nel caso $t_0 = 0, x_0 \in Q(0)$, che si trova in [4], si pone

$$K = (2 + \int_0^T g(s)\, ds + T)B$$

nella definizione di l.a.c. di Q e si fissa δ_1 corrispondente a K e $\epsilon = 1$. Per ogni $\alpha \in]0, 1 \wedge \delta_1]$ si prende un aperto $O_\alpha \supset J$ tale che $\mu(O_\alpha) < \alpha$. Quindi si prova il seguente

Lemma. *Esistono una funzione*

$$y : [0,T] \longrightarrow R^n \text{ continua}$$

e un insieme numerabile (puó essere finito) Γ *di intervalli* $[a,b[\subset [0,T[$ *due a due disgiunti tali che*

a) $y(0) = 0$, $|y(t)| \leq 1 + \int_0^t g(s)\, ds$ *per* $0 \leq t \leq T$;

b) $[0,T[= \bigcup_{[a,b[\in \Gamma} [a,b[,\ 0 < b - a \leq \alpha$ *per ogni* $[a,b[$;

c)$d(y(b), Q(b)) \leq \alpha b$ *per ogni* $[a,b[\in \Gamma$;

d) se $[a,b[\in \Gamma$ *e* $a \in O_\alpha$, *allora*

$$[a,b[\subset O_\alpha,$$

$$y(t) = y(a) + \frac{t-a}{b-a}(y(b) - y(a)) \quad \text{per } a \leq t \leq b,$$

$$|y(b) - y(a)| \leq e(K \cap Q(a), Q(b));$$

e) se $[a, b[\in \Gamma$ *e* $a \notin O_\alpha$, *allora esiste* $f \in L^1(a, b; R^n)$ *tale che*

$$f(t) \in F(t, Q(t) \cap [y(t) + \alpha(T+1)B]) \quad q.d. \ su \ [a, b[,$$

$$y(t) = y(a) + \int_a^b f(s)\, ds \ per \ a \leq t \leq b.$$

Per la dimostrazione del lemma si considera l'insieme M_α delle terne (τ, y, Γ) dove $y : [0, \tau] \longrightarrow R^n$ e Γ verificano le condizioni dell'enunciato del lemma con T sostituito da $\tau \in [o, T]$. Si introduce in M_α la rela zione d'ordine definita da

$$(\tau_1, y_1, \Gamma_1) \prec (\tau_2, y_2, \Gamma_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \tau_1 \leq \tau_2, \\ y_2(t) = y_1(t) \ per \ 0 \leq t \leq \tau_1, \\ \Gamma_1 \subset \Gamma_2. \end{cases}$$

e si applica il lemma di Zorn per ottenere un elemento massimale. Tale elemento massi- male soddisfa le richieste del lemma.

Il lemma fornisce una soluzione approssimata y_α del problema (P). Si prova poi che esiste una successione y_{α_n} che converge a una solu- zione.

Per la dimostrazione del punto ii) nel caso $t_0 = 0$ e $g(t) \geq 1$, che si trova in [3], si esegue in primo luogo un cambiamento di variabile

$$t = \phi(s), \quad 0 \leq s \leq \tilde{T},$$

tale che

$$\phi \ \text{ e la sua inversa } \ \phi^{-1} \ \text{ sono assol. continue } ,$$

$$\dot{\phi}(s) = 0, \forall s \in \phi^{-1}(J),$$

$$s < \bar{s} \Rightarrow 0 < \phi(\bar{s}) - \phi(s) \leq \bar{s} - s,$$

$$x \in Q(\phi(s)) = \tilde{Q}(s), u \in DQ(\phi(s), x)(1) \Rightarrow$$

$$\exists \theta \in [D_+\phi(s), D^+\phi(s)] : \theta u \in D\tilde{Q}(s, x)(1).$$

Posto

$$\tilde{F}(s, x) = \{\theta u |\ D_+\phi(s) \leq \theta \leq D^+\phi(s), u \in F(\phi(s), x)\},$$

si verifica che

$$\tilde{F}(s, x) \cap D\tilde{Q}(s, x)(1) \neq \emptyset \text{ per ogni } s, x \in \tilde{Q}(s),$$

$$\tilde{F}(s, \tilde{Q}(s)) \subset B \text{ per ogni } s,$$

e che per ogni soluzione $\tilde{y}$ del problema $(\tilde{P})$, trasformato di (P), la funzione

$$t \longrightarrow x(t) = \tilde{y}(\phi^{-1}(t))$$

risolve il problema (P).

Con questo ci siamo ricondotti al caso in cui si ha per il problema (P)

$$g(t) = 1 \quad \text{per } 0 \leq t \leq T,$$

$$F(t,x) \cap DQ(t,x)(1) \neq \emptyset \text{ per ogni } t, x \in Q(t),$$

$$t \leq \bar{t} \Rightarrow Q(t) \subset Q(\bar{t}) + (\bar{t} - t)B.$$

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme chiuso $J_\epsilon \subset [0,T]$ tale che

$$\mu([0,T] \backslash J_\epsilon) \leq \epsilon,$$

$$F_{|(J_\epsilon \times R^n) \cap Q} \text{ é u.s.c.}$$

$$Q_{|J_\epsilon} \text{ é continua}$$

e si ha

$$O_\epsilon =]0,T[\backslash J_\epsilon = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[,$$

dove l'unione é disgiunta e $a_n < b_n$. Si pone

$$h_\epsilon(t) = 3 \int_0^t \chi_{O_\epsilon}(s)\, ds,$$

$$Q_\epsilon(t) = Q(t) + h_\epsilon(t)B \text{ per } t \in J_\epsilon,$$

$$F_\epsilon(t,x) = \{u \in F(t,y) |\ |y - x| = d(x, Q(t))\} \text{ per } t \in J_\epsilon \backslash \bigcup_{n \geq 1} \{b_n\},\ x \in Q_\epsilon(t)$$

e poi si prolungano convenientemente Q_ϵ e $F_\epsilon(.,x)$ su tutto [0,T] in modo da avere

grafico di Q_ϵ chiuso ,

F_ϵ u.s.c. su Q_ϵ,

$F_\epsilon(t,x) \cap DQ_\epsilon(t,x)(1) \neq \emptyset$ per ogni $t, x \in Q_\epsilon(x)$.

Ora si puó applicare un noto teorema di esitenza (cfr.[1],[6]) a Q_ϵ e a

$$Q_\epsilon \ni (t,x) \longrightarrow \overline{co}(F_\epsilon(t,x))$$

e ottenere una soluzione x_ϵ. Infine si puó " passare al limite per $\epsilon \to 0+$ " e ottenere una soluzione per (P).

Per la dimostrazione del punto iii), contenuta in [5], si prova che esiste $J \subset [0,T]$ tale che $\mu(J) = 0$ e per ogni $t \notin J$, $x \in R^n$, $u \in F(t,x)$, $\alpha > 0$

$$d(u, \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(s, x + \alpha B)\, ds) \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Se inoltre $x \in Q(t)$ e $u \in DQ(t,x)(1)$, si ottiene

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h} d(0, Q(t+h) - x - \int_t^{t+h} F(s, x + \alpha B)\, ds) = 0.$$

Ora si puó ripetere la dimostrazione del lemma e ottenere poi una soluzione per (P) come nel caso i).

Osservazione 1.- Nel punto ii) non si puó sostituire l'ipotesi di F quasi u.s.c. con la seguente:

F(.,x) mis. su $Q^{-1}(x)$, F(t,.) u.s.c. su Q(t),

come prova l'esempio, da [3],

$$Q(t) = \{(x_1, x_2) \in R^2 |\, x_1 = t, 0 \leq x_2 \leq t\},\ 0 \leq t \leq 1,$$

$$F(t, x_1, x_2) = (1, t\chi_E(x_1)) \text{ per } (x_1, x_2) \in Q(t),\ 0 \leq t \leq 1,$$

ove $E \subset [0,1]$ é un insieme non misurabile. in questo caso si ha

$$F(t,x) \in DQ(t,x)(1) \text{ per } 0 \leq t \leq 1,\ x \in Q(t),$$

ma non esiste $x(.) \in W_1^1(0,1;R^n)$ tale che

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \ q.d. \text{ su } [0,1], \quad x(0) = 0,$$

$$x(t) \in Q(t) \text{ per } 0 \leq t \leq 1$$

Osservazione 2.- Occorre fare alcune modifiche alle ipotesi dei teoremi 1 e 2 di [4], rese necessarie dal fatto che il Lemma di 1 [4] non é corretto. Si ristabilisce la validitá del Teorema 1 di [4] sostituendo la relativa condizione b) con la seguente:
b) esiste $J \subset [0,T]$ con $\mu(J) = 0$ tale che per ogni $t \notin J$ e $x \in D$ si ha

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h} d(x + \int_t^{t+h} F(s,x)\, ds, D) = 0,$$

mentre si ristabilisce la validitá del Teorema 2 di [4] sostituendo la relativa condizione c) con la seguente:
c) esiste $J \subset [0,T]$ con $\mu(J) = 0$ tale che per ogni $t \notin J$ e $x \in D$ si ha

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h} d(x + hv, D) = 0,\ \forall v \in F(t,x).$$

Per la modifica del Lemma 1 in [4] fissiamo $x \in D$, fissiamo $r > 0$ tale che $D_0 = \{y \in D |\ |y - x| \leq r\}$ = chiuso , fissiamo $0 \leq g \in L^1(0,T)$ tale che

$$F(t, D_0) \subset g(t)B \text{ q.d.}$$

e supponiamo (eventualmente diminuendo T)

$$\int_0^T g(s)\, ds < r.$$

Sia

$$0 < \delta \leq \frac{1}{T}(r - \int_0^T g(s)\, ds)$$

e sia $\Omega \supset J$ un aperto tale che $\mu(\Omega) < \delta$. Il Lemma 1 in [4] va sostituito con il seguente

Lemma 1. *Sotto le condizioni precedenti e le ipotesi del Teorema 1 di [4], esistono le funzioni*

$$f \in L^1(0,T;X), \quad \psi : [0,T] \longrightarrow D_0 \text{ a variazione limitata}$$

e l'insieme numerabile (o finito) Γ *di intervalli* $[a,b[\subset [0,T[$ *due a due disgiunti tali che, posto*

$$z(t) = x + \int_0^t f(s)\,ds \text{ per } 0 \le t \le T,$$

si ha

i) $0 < b - a \le \delta$ *per ogni* $[a,b[\in \Gamma$, $[0,T[= \bigcup_{[a,b[\in\Gamma} [a,b[$,

$$\psi(t) = \psi(a) \text{ per } a \le t < b, \quad |z(a) - \psi(a)| \le \delta a,$$

$$V_0^T(\psi) \le \int_0^T [\delta + g(t)]\,dt, \quad |z(T) - \psi(T)| \le \delta T;$$

ii) $a \in \Omega \Rightarrow [a,b[\subset \Omega, \quad f(t) = 0$ *per* $a \le t < b$;
iii) $a \notin \Omega \Rightarrow f(t) \in F(t,\psi(a))$ *per* $a \le t < b$ *e*

$$|\psi(a) + \int_a^b f(t)\,dt - \psi(b)| \le \delta(b-a).$$

La dimostrazione é simile alla dimostrazione del Theorem 4.3 di [5].

Per $F(t,.)$ lipschitziana si ha il seguente

Teorema 2. *Supponiamo* Q *assolutamente continua,* $D(t) = R^n$ *per ogni* t, $F(.,x)$ *misurabile, per ogni naturale* k *esiste* $0 \le g_k \in L^1(0,T)$ *tale che per quasi ogni* t *e per ogni* $x, x' \in kB$

$$F(t,x) \subset F(t,x') + g_k(t)|x - x'|\,B.$$

Allora sono equivalenti le affermazioni

a) esiste $J \subset [0,T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : F(t,x) \cap DQ(t,x)(1) \ne \emptyset;$$

b) esiste $J \subset [0,T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : (\{1\} \times F(t,x)) \cap \overline{co}(T_Q(t,x)) \ne \emptyset;$$

c) per ogni $t_0 \in [0,T[$ *e* $x_0 \in Q(t_0)$ *esiste una soluzione* $x(.) \in W_1^1(t_0,T;R^n)$ *del problema (P).*

Per provare che da b) segue c), in [5] si considera l'insieme compatto

$$R(t,t_0;x_0) =$$
$$\{x(t) |\ x(.) \in W_1^0(t_0,T;R^n), x(t_0) = x_0, \dot{x}(s) \in F(s,x(s)) \text{ q.d. per } t_0 \le s \le T\}$$

e si prova che la funzione

$$[t_0, T] \ni t \longrightarrow r(t) = d(Q(t), R(t, t_0; x_0))$$

é assolutamente continua e verifica la condizione

$$\dot{r}(t) \leq g_k(t) r(t), \; r(0) = 0, \; t_0 \leq t \leq T,$$

per qualche k indipendente da t. Ne segue r(t)=0 per ogni t.

Ora si pone, per ogni numero naturale m,

$$t_i - t_{i-1} = \frac{T - t_0}{m} \text{ per } 1 \leq i \leq m$$

e si costruisce $x_m \in W_1^1(t_0, T; R^n)$ tale che

$$x_m(t_i) \in Q(t_i), \; x_m(t_0) = x_0, \; \dot{x}_m(t) \in F(t, x_m(t)) \;\; q.d.$$

Infine si prova che una sottosuccessione converge a una soluzione del problema(P).

In [5] é provato anche il seguente teorema di invarianza

Teorema 3. *Sotto le ipotesi del Teorema 2 sono equivalenti le affermazioni*

a) esiste $J \subset [0, T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : F(t, x) \subset DQ(t, x)(1);$$

b) esiste $J \subset [0, T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che*

$$\forall t \notin J, \forall x \in Q(t) : (\{1\} \times F(t, x)) \subset \overline{co}(T_Q(t, x));$$

c) per ogni $t_0 \in [0, T[, \; x_0 \in Q(t_0), \; x(.) \in W_1^1(t_0, T; R^n)$ *tale che*

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \;\; q.d. \;\; su \; [t_0, T], \; x(t_0) = x_0,$$

si ha

$$x(t) \in Q(t) \; per \; t_0 \leq t \leq T.$$

In [2] é studiato il problema (P) in una spazio di Banach separabile X e sono ottenuti vari teoremi di esistenza, anche di soluzioni a variazione limitata. Qui ci limitiamo a riportare il seguente

Teorema 4. *Supponiamo verificate le condizioni (H1), (H2) e (H3) con* R^n *sostituito da* X *e* $D(t) = X$ *per ogni t. Supponiamo inoltre*

i) Q ha grafico chiuso;

ii) $F(t, x) \subset (1 + |x|)\Gamma(t)$ *per ogni* $(t, x) \in [0, T] \times X$, *con* $\Gamma(.)$ *misurabile a valori compatti convessi non vuoti in* X *e*

$$\int_0^T \max_{y \in \Gamma(t)} |y| \, dt < \infty;$$

iii) F *é* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(X)$ *misurabile, ove* $\mathcal{L}$ *(* $\mathcal{B}(X)$ *) rappresenta la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in [0,T] (boreliani in X);*
iv) F(t,.) é u.s.c. per ogni t;
v) $\forall t \in [0,T[, \forall x \in Q(t):$

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{1}{h} d(0, Q(t+h) - x - \int_t^{t+h} F(s,x)\, ds) = 0.$$

Allora esiste una soluzione.

I teoremi 2 e 3 sono applicati in [5] al problema di Mayer

$$(M) \begin{cases} g(x(T)) \longrightarrow min \\ x(.) \in W_1^1(t_0, T; R^n), \\ \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d. }, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

per ottenere varie proprietá della funzione valore definita da

$$V(t_0, x_0) =$$
$$inf\{g(x(T))|\ x(.) \in W_1^1(t_0, T; R^n),\ \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d.}, x(t_0) = x_0\}$$

per $0 \leq t_0 \leq T,\ x_0 \in R^n$.

Fra i principali risultati figura il seguente

Teorema 5. *Supponiamo che F soddisfi le ipotesi del Teorema 2, supponiamo*

$$g : R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\} \text{ l.s.c.},$$

$$W : [0,T] \times R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\} \text{ l.s.c..}$$

Poniamo

$$[0,T] \ni t \to Q(t) = \{(x,r) \in R^n \times R|\ r \geq W(t,x)\},$$

$$D_\uparrow g(x)(u) = \liminf_{\substack{h \to 0+ \\ u' \to u}} \frac{g(x + hu') - g(x)}{h}, \text{ se } g(x) \in R.$$

Allora sono equivalenti le affermazioni
i) W é la funzione valore per il problema (M);
ii) Q(.) é assolutamente continua, $Q(t) \neq \emptyset$ *per ogni t,*

$$W(T,x) = g(x) \text{ per ogni } x \in R^n,$$

esiste $J \subset [0,T]$ *con* $\mu(J) = 0$ *tale che, per ogni* $t \notin J,\ x \in R^n$ *verificanti la condizione* $W(t,x) \in R$, *si ha*

$$\exists u \in F(t,x) : D_\uparrow W(t,x)(1,u) \leq 0,$$

$$\forall u \in F(t,x) : D_\uparrow W(t,x)(-1,-u) \leq 0.$$

La formula

$$0 \geq D_{\uparrow}W(t,x)(1,u) \Longleftrightarrow (u,0) \in DQ(t,(x,W(t,x)))(1) \subset$$
$$\subset DQ(t,x,r)),\ \forall (x,r) \in Q(t)$$

permette di applicare il Teorema 2 al problema

$$(\dot{x}(t),\dot{z}(t)) \in F(t,x(t)) \times \{0\},$$

$$(x(t_0),z(t_0)) = (x_0,W(t_0,x_0),$$

$$(x(t),z(t)) \in Q(t)$$

e ottenere $W(t_0,x_0) \geq W(T,x(T)) = g(x(T)) \geq V(t_0,x_0)$. In modo simile (cfr[5]) si ottiene dal Teorema 3 $W(t_0,x_0) \leq V(t_0,x_0)$.

BIBLIOGRAFIA

1. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
2. L. Benabdellah, C. Castaing, M.A. Gamal Ibrahim, *BV solutions of multivalued differential equations on closed moving sets in Banach spaces*, Sém. d'Anal. Convexe Montpellier, Exposé 10 (1992), 10.1–10.48.
3. D. Bothe, *Multivalued differential equations on graphs*, Nonlinear Analysis **18, 3** (1992), 245–252.
4. A. Cavallucci, *Seminario di Analisi Matematica*, Bologna, 1992-93.
5. H. Frankowska, S. Plaskacz, T. Rzezuchowski, *Measurable Viability Theorems and the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation*, J. Diff. Equations **116** (1995), 265–305.
6. K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, New York, 1992.
7. R. B. Vinter, P. Wolenski, *Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time*, SIAM J. Control Optim. **28, 6** (1990), 1404–1420.